

Εξετάσεις Ιουνίου 2022 - Απειροστικός Λογισμός 2

Διδάσκοντες Ε. Νικολιδάκης και Χ. Σαρόγλου

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Κάτοχος Msc)

Θέμα 1

(i) (1 μον.) Έστω ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$. Το αντίστροφο ισχύει;

(ii) (1 μον.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

(iii) (1 μον.) Να βρεθούν τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n}$ συγκλίνει.

Θέμα 2

(i) (0,5 μον.) Διατυπώστε (χωρίς απόδειξη) την αρχή της μεταφοράς (ακολουθιακό ορισμό) της ομοιόμορφης συνέχειας.

(ii) (1,5 μον.) Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Ναδειχθεί ότι το άθροισμά τους $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτησης.

(iii) (1,5 μον.) Ναδειχθεί ότι οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in (0, \pi) \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς

Θέμα 3

(i) (1 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$ και η διαμέριση του $[0, 1]$, $P = \{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 1\}$. Υπολογίστε το κατω άθροισμα $L(f, P)$ της f ως προς τη διαμέριση P .

(ii) (1,5 μον.) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [1, 2] \\ -x & , \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [1, 2] \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, 2]$.

Θέμα 4

(i) (1,5 μον.) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-1)^2} dx \quad \text{και} \quad \int_1^2 \ln x dx.$$

(ii) (1 μον.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx$.